

2.1 实数系的连续性

2023年9月19日 星期二 10:28

戴德金分割定理

$$\text{令 } A = \{x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 < 2\} \quad A \cup B = \mathbb{Q}^+ \\ B = \{x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 > 2\}$$

性质 A 中没有最大元
 B 中没有最小元

定义: 设 S 是一个数集, $x_0 \in S$
若对 $\forall x \in S$, 都有 $x \leq x_0$
则称 x_0 为 S 的最大元

如何证明?

在 S 中取 $\forall$ 一个 x
取 y s.t. $0 < y - x < \sqrt{2} - x = \frac{2-x^2}{\sqrt{2}+x}$
令 $y = x + \frac{2-x^2}{2+x}$, 则一定可以找到一个
 y 满足 $x < y < \sqrt{2}$

$$\tilde{A} = A \cup \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}$$

如何抽象定义 $\sqrt{2}$: 用集合来定义实数

$$\sqrt{2} \leftrightarrow \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{A}$$

第一步:

$\mathbb{R}$ 中的元素是有理数集 $\mathbb{Q}$
的一些特定子集 $\{\alpha, \beta, \dots\}$

满足一定条件

- (1) $\alpha \neq \emptyset, \alpha \neq \mathbb{Q}$
- (2) $\forall x \in \alpha, \exists y \in \alpha$ s.t. $y > x$
(不存在最大元)
- (3) 若 $x \in \alpha$, 则 $\forall y < x$, 且 $y \in \mathbb{Q}$
有 $y \in \alpha$

第二步: 序关系

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 让 $\alpha < \beta$, 若 $\alpha \subset \beta$ 且 $\alpha \neq \beta$

第三步: 四则运算

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 定义

$$\alpha + \beta = \{x+y, x \in \alpha, y \in \beta\}$$

确界存在定理 (对有理数集不成立)

非空有上界的实数集一定上有确界

非空有下界的实数集一定下有确界

定义: 设 S 是一个数集, M 是一个数

称 M 是 S 的一个上界, 如果:

$$\forall x \in S, \text{ 有 } x \leq M$$

如果数集 S 存在上界, 则称 S 为一个有上界的集合

若其既有上界也有下界, 称之为有界集合

$\Updownarrow$

$$\exists M_1, M_2 \text{ s.t. 对 } \forall x \in S \text{ 有 } M_1 \leq x \leq M_2$$

$\Updownarrow$

$$\exists G > 0, \text{ s.t. } \forall x \in S \text{ 有 } |x| \leq G$$

定义: 设 S 是一个数集, M 是一个数

称 M 是 S 的上确界, 记为 $\sup S$
(下确界为 $\inf S$)

如果: (1) $\forall x \in S, \text{ 有 } x \leq M$

$$(2) \forall y < M, \exists x \in S, \text{ s.t. } x > y$$

$$(2') \forall \varepsilon > 0, \exists x \in S, \text{ 使 } x > M - \varepsilon$$

A 在 $\mathbb{Q}$ 中所有上界组成的集合 = B

而 B 中无最小元

故 A 在 $\mathbb{Q}$ 中没有上确界

例: 设 A, B 都是非空数集, 且:
 $\forall x \in A, y \in B \text{ 有 } x \leq y$
则 $\sup A \leq \inf B$ 所有成立 $\sup A \leq \inf B$

证: 任取 $y \in B$, 则 y 是 A 的上界
又 A 非空, 所以由确界存在定理,
 $\sup A$ 存在
同理, $\inf B$ 也存在
任取 $y \in B$, 则 $y \geq \sup A$
所以 $\sup A$ 是 B 的一个下界, 于是 $\sup A \leq \inf B$

性质: 若数集 S 存在最大元 M , 则 $M = \sup S$

若数集 S 存在最小元 m , 则 $m = \inf S$

定义: 如果数集 S 没有上界, 则定义 $+\infty$ 为 S 的非正常上确界
记为 $\sup(S) = +\infty$

如果数集 S 没有下界, 则定义 $-\infty$ 为 S 的非正常下确界
记为 $\inf(S) = -\infty$

性质: 当 $a > 1$ 时, a^x 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增

证: 任取 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 且 $x_1 < x_2$

由有理数的稠密性, 存在 $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$

$$\text{s.t. } x_1 < r_1 < r_2 < x_2$$

$$\text{从而 } a^{x_1} \leq a^{r_1} < a^{r_2} \leq a^{x_2}$$

上确界

2.2 数列极限

2023年9月21日 星期四 13:29

定义1: 设 $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个给定的函数.

则称 $f(1), f(2), \dots$ 为一个数列.

若记 $x_n = f(n), n \geq 1$

则上面的数列也常写作 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$; $\{x_n\}$

其中的 x_n 被称为数列的通项.

定义2: 若 $\{x_n\}$ 是一个给定的数列, $a \in \mathbb{R}$.

称 $\{x_n\}$ 以 a 为极限:

(1) 如果: 当 n 趋于无穷时, x_n 趋于 a

(2) 如果: 只要 n 无穷大, 就有 $|x_n - a|$ 充分小.

(3) 如果: 要使 $|x_n - a|$ 充分小, 只要 n 充分大.

(4) 如果: $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - a| < \varepsilon$, 只要 n 充分大.

(5) 如果: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$ 当 $n > N$ 时
均有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

ε - N 语言想法的推演过程.

定义3: 若对 $\forall a$, x_n 均不以 a 为极限, 那么称
数列 $\{x_n\}$ 发散.

例: 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$ 其中 $|q| < 1$

即证对 $\forall \varepsilon > 0 \exists n > N$, 使 $|q|^n < \varepsilon$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{|q|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{令 } \frac{1}{|q|} = 1+h \quad (h > 0)$$

$$(1+h)^n \geq 1+nh > nh > \frac{1}{\varepsilon}$$

故当 $n > \frac{1}{h\varepsilon}$ 时 $|q|^n < \varepsilon$.

找到 n 后 简单说明一下就行了.

注1: 在数列极限定义中, 要求 N 为正整数.

实际上, 可换作 " $\exists N > 0$ "

定义中的 " $\text{当 } n > N \text{ 时} \dots$ " $\Rightarrow$ " $\text{当 } n \geq N \text{ 时} \dots$ "

例: 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$$\text{令 } \alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1 \quad \text{则 } \alpha_n > 0$$

$$n = (1+\alpha_n)^n \geq 1+n\alpha_n + \frac{C_n^2}{2} \alpha_n^2$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{n-1}{2} \alpha_n^2 \Rightarrow \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$$

$$\frac{2}{n-1} < \varepsilon^2 \Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$$

数列极限的性质

1. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则它的极限必是唯一的. **唯一性.**

2. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 有界. **有界性.**

(即: $\exists M > 0, \text{s.t. } \forall n \in \mathbb{Z}^+, \text{有 } |x_n| \leq M$)

3. 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 分别收敛于 a 与 b , 且 $a < b$, 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 使当 $n > N$ 时, 有 $x_n < y_n$. **保序性.**

推论: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $b > a$

则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $x_n < b$

(1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $a \neq 0$.

实际上, $\exists N$, 使 $n > N$ 时 $|x_n| > \varepsilon |a|$ (其中 $\varepsilon \in (0, 1)$)

即 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n| > \frac{|a|}{2}$.

4. 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 分别收敛于 a 与 b , 且 $\exists N_0 \in \mathbb{Z}^+$

s.t. 当 $n > N_0$ 时, 有 $x_n \geq y_n$, 则 $a \geq b$. **保不等式**

(反证法 + 保序性).

注意: 若 $x_n < y_n (n \geq 1)$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ (均收敛).

注意还是 $\leq$!

5. 设 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 是给定的数列.

并且满足 $\exists N_0 \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N_0$ 时, 有

$x_n \leq y_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n\} = a$

逼敛性, 夹逼定理.

则 $\{y_n\}$ 收敛, 且极限为 a .

由极限定义, 可知

当 $n > N_1$ 时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{从而 } x_n > a - \varepsilon$$

$$|z_n - a| < \varepsilon, \text{从而 } z_n < a + \varepsilon$$

$$\text{从而 } a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$$

$$\text{从而 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$$

定理: (四则运算法则)

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$ (仅限有限项)

故 $\exists N = [\frac{2}{\varepsilon} + 1] + 1$ 时 当 $n > N$ 时
均有 $a_n < \varepsilon$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

注: 1° ε 的任意性.

① 一旦给出即确定, 由这个 ε 来确定 N

② 由于 ε 是任意的, 所以 $\varepsilon^2, \frac{1}{2}\varepsilon^2, 2\varepsilon$ 等可以取遍所有正整数. 从而定义中 " $|x_n - a| < \varepsilon$ " 可换作 " $|x_n - a| < \varepsilon^2$ "

③ 定义中的 " $\forall \varepsilon > 0$ ", 可换作

① " $\exists \varepsilon_0, \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \exists N > 0 \dots$ "

命题② $\rightarrow$ 命题①

1) $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ 已经找到 N

2) $\varepsilon \in [\varepsilon_0, +\infty)$ 若已找到 N , s.t. $|x_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$

则 $|x_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon$ 亦成立

2° ε 的相应性

N 随 ε 的变化而变化. 常写作 $N(\varepsilon)$

但对于一个 ε , 有无穷多个 N 与 ε 对应.

3° "当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$ "

意味着: 数列 $\{x_n\}$ 中, 满足 $|x_n - a| \geq \varepsilon$

的项仅有有限个

定义: $O(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$.

—— 称作点 a 的 ε 邻域

定义 1': 称 $\{x_n\}$ 收敛于实数 a , 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 在 $O(a, \varepsilon)$

之外仅有 $\{x_n\}$ 的有限项

性质: 增加, 减少有限项, 不影响数列 $\{x_n\}$ 的收敛性及其极限.

定义: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 则称 $\{x_n\}$ 是一个无穷小数列, 也称它为无穷小量.

$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N > 0, \exists n > N$, 使 $|x_n - a| \geq \varepsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = a \cdot b$$

进一步, 假设 $y_n \neq 0, (\forall n \geq 1)$ 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

实际上, 我们为了证明极限的四则运算.

我们只需要证明 加法与乘法.

(1) (加法) 利用:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

(2) (乘法) 利用:

$$|x_n y_n - ab| \leq |x_n y_n - b x_n| + |b x_n - ab|$$

$$= |x_n| |y_n - b| + |b| |x_n - a|$$

$$\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

(由 $\{x_n\}$ 有界性).

又由 ε 的任意性, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$

推论: (线性性).

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

对 $\forall k, l \in \mathbb{R}$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k x_n + l y_n) = k a + l b$$

2.3 无穷大量

2023年9月28日 星期四 14:45

定义: 设 $\{x_n\}$ 是一个给定的数列.

如果 $\forall G > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n| > G$

则称 $\{x_n\}$ 有非正常极限 ∞ , 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$

也称 $\{x_n\}$ 是一个无穷大量

类似可定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty / -\infty$

问: $\{x_n\}$ 是一个无穷大量, 是否必有: 或者 $\{x_n\}$ 是一个正无穷大量, 或是一个负无穷大量. $\times$

1, -2, 3, -4, ...

性质: 若 $x_n \neq 0, \forall n \geq 1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$$

定理: 设 $\{x_n\}$ 为无穷大量, 若当 $n > N_0$ 时

$|y_n| \geq \delta > 0$ 成立, 则 $\{x_n y_n\}$ 是无穷大量

例: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \dots + b_{l-1} n + b_l}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-l} \cdot \left(\frac{a_0 + \dots}{b_0 + \dots} \right) \neq 0$$

当 $k > l$ 为无穷大量

当 $k < l$ 为无穷小量

当 $k = l$ $\frac{a_0}{b_0}$

Stolz 定理.

[定义: $\{x_n\}$ 是一个给定的数列, 若 $\forall n \geq 1$ 有 $x_n \leq x_{n+1}$, 则称 $\{x_n\}$ 是一个单调递增数列.]

若 $\{y_n\}$ 是严格单调增加的正无穷大量.

同时 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a (a \in \mathbb{R}, +\infty, -\infty)$ 不能是 ∞

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$

证明: 仅对 $a = 0$ 进行证明

$\forall \varepsilon > 0$, 由 (1), $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$, 使 $n > N_1$ 时,

有 $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \right| < \varepsilon$

从而 $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon |y_n - y_{n-1}| = \varepsilon (y_n - y_{n-1})$

由此, 当 $n > N_1$ 时,

$$|x_n - x_{N_1}| \leq |x_n - x_{n-1}| + \dots + |x_{N_1+1} - x_{N_1}| \leq \varepsilon (y_n - y_{N_1})$$

由 (1), 可以不妨假设 $y_{N_1} > 0$, 从而当 $n > N_1$ 时, $y_n > 0$

于是 $\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{N_1}}{y_{N_1}} \right| \leq \varepsilon \cdot \left(1 - \frac{y_{N_1}}{y_n} \right) < \varepsilon$

由 (1), $\exists N > N_1$, 且 $N \in \mathbb{Z}^+$, 使 $n > N$ 时有

$$\left| \frac{x_N}{y_N} \right| < \varepsilon$$

从而当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| \leq \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x_N}{y_N} \right| + \left| \frac{x_N}{y_N} \right| < 2\varepsilon$$

2.4 收敛准则

2023年10月7日 星期六 13:47

定义: 设 $\{x_n\}$ 是一个数列

设 $\{n_k\}$ 是一个由正整数组成的无限集

且 $n_1 < n_2 < \dots < \dots$

则称 $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ 为 $\{x_n\}$ 的一个子列

定理: 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a

则它的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于 a (反之亦然)

证: 由收敛定义, 可知 $n_k \geq k$ (注)

$\forall \epsilon > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 可知

$\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 使 $n > N$ 时有 $|x_n - a| < \epsilon$

由 (*) 式, 当 $k > N$ 时, 有 $n_k \geq k > N$

从而 $|x_{n_k} - a| < \epsilon$, 于是 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$

推论: 若存在数列 $\{x_n\}$ 的两个子列

$\{x_{n_k}\}$ 与 $\{x_{m_l}\}$ 收敛于不同的极限, 则数列 $\{x_n\}$ 发散.

单调有界数列收敛定理

如果数列 $\{x_n\}$ 单调, 并且有界, 则 $\{x_n\}$ 必定收敛

证: 不妨设 $\{x_n\}$ 单调有上界.

令 S 是所有 x_n 组成的数集, 则 S 非空有上界

由确界存在定理, S 有上确界, 记其为 a .

由上确界定义, 可知

(1) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 有 $x_n \in a$

(2) $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 使 $x_N > a - \epsilon$.

于是 $\forall \epsilon > 0$, 令 N 为 (2) 中所取正整数.

则当 $n > N$ 时, 有

$a - \epsilon < x_n < x_N \leq a < a + \epsilon$.

$\Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(注: 若 $\{x_n\}$ 单调有下界, 则数列 $\{x_n\}$ 的极限

为该数列中所有元素组成数集的上确界.)

例: 令 $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n = 1, 2, \dots$

$y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$

可知 $\{x_n\}$ 有上界 $\{y_n\}$ 有下界 $\Rightarrow \{x_n\}, \{y_n\}$ 均收敛, 两者极限显然相同

记其极限为 e

法1: $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (\frac{1}{n})^k$

$= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} (\frac{1}{n})^k$

$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \dots + \frac{1}{n!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\dots(1 - \frac{n-1}{n})$

$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n+1}) - \dots + \frac{1}{n!} (1 - \frac{1}{n+1}) - \dots (1 - \frac{n}{n+1})$

$+ \frac{1}{(n+1)!} (1 - \frac{1}{n+1}) - \dots (1 - \frac{n}{n+1}) < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} < 1 + 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} < 3$

注意 x_n, x_{n+1} 每项都是 x_{n+1} 大, 且 x_{n+1} 多一个非负项, 故 $x_{n+1} > x_n$

故我们说明了 $\{x_n\}$ 单调增, 且有上界

法2: $(1 + \frac{1}{n})^n \leq (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt[n]{(1 + \frac{1}{n})^n} \leq 1 + \frac{1}{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n}) \dots (1 + \frac{1}{n})} < \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$

闭区间套定理

定义: 设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个给定的闭区间套

如果它满足

(1) $\forall n \geq 1$, 有 $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

则称 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个闭区间套 (简: 区间套)

定理: 假设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个闭区间套, 则 $\exists \xi \in \mathbb{R}$.

使 $\forall n \geq 1$, 有 $\xi \in [a_n, b_n]$

证: 由定理条件 $\forall n \geq 1$, 有 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_1 \leq \dots \leq b_n \leq 1$

从而 $\{a_n\}$ 是单调有上界的数列, 于是收敛. 记其极限为 ξ

由 (1), 可知 $\{b_n\}$ 的极限也为 ξ

注意到 ξ 是所有 a_n 组成数集的上确界. 故 $n \geq 1$ 时 $\xi \geq a_n$

同理, ξ 是所有 b_n 组成数集的下确界. 故 $n \geq 1$ 时 $\xi \leq b_n$

那么 $\xi \in [a_n, b_n]$

下证唯一性: 假设 ξ' 也满足:

$\forall n \geq 1$, 有 $a_n \leq \xi' \leq b_n$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$, 由夹逼定理 $\xi' = \xi$

为什么开区间就不符合?

开区间的区间套有许多“断点”, 倘若极限刚好取到断点时就不满足.

开区间的断点下

倘若 $\xi \geq a_n$, $\xi \leq b_n$

故 ξ 不是 (a_n, b_n)

例: 设 $p > 0$, 令 $x_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$, 判断 $\{x_n\}$ 的收敛性.

当 $p = 1$ 时 $\Rightarrow$ 发散

当 $p \in (0, 1)$ 时 $\Rightarrow$ 发散

当 $p > 1$ 时

$x_{2^{n+1}} - x_{2^n} = 1 + (\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + (\frac{1}{2^n})^p + \dots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^p})$

$< 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^p} + 4 \cdot \frac{1}{4^p} + \dots + 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^p}$

$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \dots + \frac{1}{(2^{p-1})^n}$ $\checkmark$

例: 令 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

则 $\{x_n\}$ 收敛 $\leftarrow \begin{cases} \text{单调} \\ \text{大于0} \end{cases}$

$\downarrow$

极限: 欧拉常数

有限覆盖定理

(1) 定义 (开覆盖): 设 $S \subset \mathbb{R}$, 设 H 是由开区间组成的族, 若 $\forall x \in S$,

$\exists (a, b) \in H$, 使 $x \in (a, b)$, 则称 H 是 S 的一个开覆盖, 也称 H 覆盖 S

若 H 中元素个数是无限 (有限), 则称 H 是 S 的一个无限 (有限) 开覆盖.

聚点定理与致密性定理

(1) 定义 (聚点): 设 $S \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, 称 a 为 S 的一个聚点

如果 $\forall \epsilon > 0$, $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 含有 S 中无限个点 (性质1)

命题: 性质1成立 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$, $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 中含有 S 中不同于 a 的一个点 (性质2)

Heine - Borel (海涅 - 博雷尔) 有限覆盖定理

设 H 是 S 的一个无限开覆盖, 则一定可以从 H 中找到有限个开区间覆盖 $[a, b]$
即: $[a, b]$ 的任一有限开覆盖都有有限子覆盖.

证: 假设 $[a, b]$ 不能被 H 中的有限个开区间所覆盖
则 $[a, \frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2}, b]$ 中至少有一个不能被 H 中有限个开区间所覆盖. 记其为 $[a_1, b_1]$, 同理地 $[a, \frac{a+b}{4}]$ 与 $[\frac{a+b}{4}, b]$ 也至少有一个不能被 H 中有限个开区间所覆盖. 记其为 $[a_2, b_2]$, 由此, 我们可得开区间序列: $\{[a_n, b_n]\}$. 满足:

- (1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset \dots$
- (2) $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$
- (3) $\forall n \geq 1, [a_n, b_n]$ 均不能被有限个开区间所覆盖.

由 (1), (2), $\{[a_n, b_n]\}$ 为一个闭区间套

从而, $\exists \xi \in \mathbb{R}$, 使 $\xi \in [a_n, b_n], \forall n \geq 1$

于是也有 $\xi \in [a, b]$,

从而 $\exists (a, \beta) \in H$, 使 $\xi \in (a, \beta)$.

$\exists \varepsilon > 0$, 使 $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \in (a, \beta)$.

$\exists N$, 使 $\forall n > N$, 均有 $b_n - a_n < \varepsilon$

则此时 $[a_n, b_n] \subset (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, 而此时 $[a_n, b_n]$ 被一个开区间 (a, β) 所覆盖, 与其不能被有限个开区间覆盖矛盾!

※ 相同的, 我们也可以去证实数的不可列性.

[三等分即可]

柯西收敛准则 (原理)

定义 (柯西数列或基本数列)

称数列 $\{x_n\}$ 为柯西数列或基本数列, 若

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 使当 $n, m > N$ 时

有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$

柯西收敛原理: $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \{x_n\}$ 是基本数列.

" $\Leftarrow$ "

取 $\varepsilon_0 = 1, \exists N_0 \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n, m \geq N_0$ 时

有 $|x_n - x_m| < 1$

令 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N_0-1}|, |x_{N_0}| + 1\}$

对 $\forall n \geq 1$, 有 $|x_n| \leq M$

从而 $\{x_n\}$ 有界

于是由致密性定理, 可得 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 记其极限为 a

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$, 当 $k > N_1$ 时, 有 $|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

又由 $\{x_n\}$ 为柯西数列, $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n, m \geq N_2$ 时, 有

$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

于是当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 令 $k = \max\{N_1, N_2\}$, 有 $n_k \geq k \geq N_2$

从而 $|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

用柯西收敛准则去证闭区间套定理.

a_n, a_m, b_n, b_m

$|a_m - a_n| \leq |a_m - b_m|$ 极限为 0

柯西数列

从而收敛 $\Rightarrow$ 确界原理

用闭区间套定理证明确界存在定理.

分析:

a_1

不是

$\frac{a_1+b_1}{2}$

是

a_2

b_2

如此继续 $\Rightarrow \exists \xi \in [a_n, b_n], \forall n \geq 1$

上确界

证: 令 T 是 S 所有上界组成的集合, 则 T 非空 (条件)

(1) 聚点定理: 设 S 是 $\mathbb{R}$ 中的非空有界无穷点集, 则 S 一定有聚点.

反证法: 设 S 没有聚点.

$\forall x \in [-M, M], x$ 不是 S 的聚点, $\exists \delta_x > 0$, 使 $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ 中最多含 S 中有限个点

令 $H = \{(x - \delta_x, x + \delta_x) : x \in [-M, M]\}$ 则 H 是 $[-M, M]$ 的一个开覆盖, 从而有在

$[-M, M]$ 的有限子覆盖: $\{(x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}) : i = 1, 2, \dots, k\}$

从而 $S \subseteq \bigcup_{i=1}^k (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i})$

由于对 $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i})$ 至多含 S 中有限个点.

从而 S 也仅有有限个点, 与 S 为无限集矛盾!

(2) 致密性定理: 任何有界数列必有收敛子数列

证: 假设数列 $\{x_n\}$ 有界.

(1) 若 $\{x_n\}$ 中有无穷多个相同的项, 则这些项组成的子列必然收敛

(2) 不然, 由 $\{x_n\}$ 中元素组成的数集 S 是一个无限点集. 又 S 是有界的, 由聚点定理, $\exists a \in \mathbb{R}$, 使 a 是 S 的聚点.

下面证明: a 一定是 $\{x_n\}$ 的某个子列的极限. 令 $\varepsilon_1 = \min\{|a - x_n|, 1\}$

任取 $n_1 \in \mathbb{Z}^+$, 使 $x_{n_1} \neq a$, 由 a 是 S 的聚点, $(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1) \cap S \setminus \{a\} \neq \emptyset$

有 S 中的无穷多项, 从而也有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项

所以 $\exists n_2 > n_1$, 使 $x_{n_2} \in (a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1) \cap S \setminus \{a\}$

同上, 令 $\varepsilon_2 = \min\{|a - x_{n_1}|, \frac{1}{2}\}$. 取 n_3 使 $x_{n_3} \in (a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2) \cap S \setminus \{a\}$

不断继续 $\varepsilon_k = \min\{|a - x_{n_{k-1}}|, \frac{1}{k}\}$, 满足 $|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}, k \geq 2$

从而 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$



收敛原理

收敛原则

单调有界数列收敛定理

若数列 $\{x_n\}$ 单调且有界, 则该数列收敛

证法: 利用有界性得到上 (下) 确界, 运用确界的第二条性质, 可推收敛于上 (下) 确界

闭区间套定理

假设 $\{[A_n, B_n]\}$ 是一个闭区间套, 则存在唯一一个 η , 满足 η 属于 $[A_n, B_n]$, 任意 $n \geq 1$

证法: 对序列 A_n 与 B_n 利用单调有界数列收敛定理得到两者均收敛, 由闭区间套的条件, 可知二者极限相同. 同时由极限分别为 A_n 上确界与 B_n 下确界, 说明 η 属于 $[A_n, B_n]$. 再由夹逼定理可说明唯一性.

有限覆盖定理

设 H 为 $[a, b]$ 的无限开覆盖, 必然从中可以找到有限个开区间覆盖 $[a, b]$

二分法推矛盾

聚点定理

S 为 $\mathbb{R}$ 中有界无穷点集存在聚点

反证法: 假设该有界范围内, 均不存在聚点, 可找出无限个含有限个点的开区间覆盖整个闭区间, 又由有限覆盖定理可找到有限个这样的开区间覆盖整个闭区间, 从而这个含无限个点的闭区间可被有限个含有限点集的开区间覆盖, 从而导出矛盾.

致密性定理

任何有界数列必存在收敛子序列

找一个聚点, 然后不断去逼近, 从而找到一个子序列, 从而收敛于该聚点

柯西收敛准则

数列收敛的充分必要条件是数列为基本数列

Presented with xmind

若 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0, \forall n \geq 1$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(比值判别法)

取 $a_1, b_1 \in \mathbb{R}, a_1 \in T, b_1 \in T$

(由 $S \neq \mathbb{R}$, a_1 必定存在)

由如下定义: $\{[a_n, b_n]\}: \forall n \geq 1$

$$[a_n, b_n] = \begin{cases} [a_n, \frac{a_n+b_{n-1}}{2}], & \text{若 } \frac{a_n+b_{n-1}}{2} \in T \\ [\frac{a_n+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}], & \text{若 } \frac{a_n+b_{n-1}}{2} \notin T \end{cases}$$

则 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足

(1) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$

(2) $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$

(3) $a_n \notin T$, 且 $b_n \in T, n \geq 1$

由 (1) (2), $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个闭区间套

从而 $\exists \xi \in \mathbb{R}$, 使 $\forall n \geq 1$, 有 $a_n \leq \xi \leq b_n$

下面证明 $\xi = \sup S$

$$\Rightarrow \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(1) 证明 ξ 是 S 的上界,

$\forall x \in S$, 对 $\forall n \geq 1$, 由 $b_n \in T$, 有 $b_n \geq x$

从而 $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq x$

(2) 证明 ξ 是 S 的最小上界.

$\forall \eta < \xi$, 由 $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

由数列极限保序性 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n \geq N$ 时, 有 $a_n > \eta$

因 $a_n > \eta$, 由于 a_n 不为上界, 故 $\exists x > a_n$, 从而 $x > \eta$,

那么 η 不为上界, 故 ξ 为最小上界.

若 $a_n \geq 0, \forall n \geq 1$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(根式判别法)